BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Б.РАГИМОВ, Т.Д.МУСТАФАЕВ

Бакинский Государственный Университет

В этой статье рассматривается система функциональных уравнений, имеющая важные приложения в теории геометрических объектов. Для получения её неприводимых решений эта система функциональных уравнений сводится к переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Доказывается теорема, устанавливающая условия для существования решений этой системы.

1. Введение

Будем рассматривать следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{uv}) = \Phi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}), \\ \Psi(\mathrm{uv}) = \Psi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}) + \Phi(\mathrm{u})\Psi(\mathrm{v}). \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \Phi(e) = e_0, \\ \Psi(e) = 0. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} e \in End\ \mathrm{C}^n, \\ 0, e_0 \in End\ \mathrm{C}^\nu \end{pmatrix}, \tag{2}$$

здесь Φ и Ψ - элементы комплексной банаховой алгебры β с единичным элементом e_0; 0-нулевой элемент. Поставленная задача состоит в нахождении аналитического решения системы (1), (2) в окрестности единичного элемента $e \in End\,\mathrm{C}^n$. Для решения этой задачи будем воспользоваться методами теории многомерных дифференциальных уравнений и банаховой алгебры ([1, 4, 5]).

Систему (1) впервые исследовали польские математики М. Кухажевский и М. Кучма ([2, 3]). В этих работах, где алгебра $End\,\mathrm{C}^\nu$ предполагается конечномерной, были рассмотрены только приводимые решения. Неприводимые же решения этой системы еще не были исследованы. Учитывая, что она встречается в некоторых задачах из теории геометрических объектов, полное исследование решений этой системы представляет немалый интерес.

В работе через $|\mathrm{u}|$ обозначается определитель квадратной матрицы u порядка n. В случае $\beta = End\ \mathrm{C}^\nu$ система (1) эквивалентна системе, состоящей из $2n^2\nu^2$ скалярных линейных функциональных уравнений для $2\nu^2$ функций от n^2 комплексных переменных. Система (1) всегда имеет тривиальное решение, удовлетворяющее начальным условиям (2):

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{u}) = |\mathrm{u}|^{A} = e^{A\ln|\mathrm{u}|} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(A\cdot\ln|\mathrm{u}|\right)^{k}}{k!}, \\ \Psi(\mathrm{u}) = B|\mathrm{u}|^{A}\ln|\mathrm{u}| = Be^{A\ln|\mathrm{u}|}\ln|\mathrm{u}| = B\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^{k}\left(\ln|\mathrm{u}|\right)^{k+1}}{k!} \end{cases},$$

здесь A и B – постоянные квадратные матрицы порядка ν. Кроме того, множество решений системы (1) распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой решений. Поэтому, зная только одно решение из данного класса, остальные решения можно построить пользуясь эквивалентностью решений. С другой стороны, при решении данной системы, интерес представляют лишь неприводимые решения, так как в конечномерных алгебрах любое приводимое решение можно построить с помощью неприводимых.

2. Условия интегрируемости переопределенных систем функциональных и дифференциальных уравнений

Наряду с системой (1), рассмотрим следующую переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} |\mathrm{u}|^{k} \dfrac{\partial^{k}\Phi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1q_1}\ldots\partial \mathrm{u}_{s_kq_k}} = \sum\limits_{p_1\cdots p_k} \dfrac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_kp_k}}\Phi(\mathrm{u})A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}, \\ |\mathrm{u}|^{k} \dfrac{\partial^{k}\Psi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1q_1}\ldots\partial \mathrm{u}_{s_kq_k}} = \sum\limits_{p_1\cdots p_k} \dfrac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_kp_k}}\left[\Psi(\mathrm{u})A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \Phi(\mathrm{u})B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right]. \end{cases} \tag{3}$$

$s_1, q_1, \ldots, s_k, q_k = 1, 2, \ldots, n$.

Постоянные матрицы $A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}$ и $B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}$ ($p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k = 1, 2, \ldots, n$) определяются следующим образом:

$$\left\{\frac{\partial^{k}\Phi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{p_1q_1}\ldots\partial \mathrm{v}_{p_kq_k}}\right\}_{\mathrm{v}=e} = A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}; \quad \left\{\frac{\partial^{k}\Psi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{p_1q_1}\ldots\partial \mathrm{v}_{p_kq_k}}\right\}_{\mathrm{v}=e} = B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}$$

Элементы этих матриц являются векторами β-алгебры.

Теорема 2.1. Непрерывно дифференцируемое k-ого порядка в окрестности единичного элемента $e \in End\, \mathbb{C}^{n}$ решение системы функциональных уравнений (1), (2) является решением переопределенной системы дифференциальных уравнений (3).

Доказательство. Пусть $(\Phi(\mathrm{u}), \Psi(\mathrm{u}))$ - непрерывно дифференцируемое k-ого порядка в окрестности $\mathrm{u} = e \in End\, \mathbb{C}^{n}$ решение системы (1). Подставляя это решение в (1) получаем тождество:

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{uv}) = \Phi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}), \\ \Psi(\mathrm{uv}) = \Psi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}) + \Phi(\mathrm{u})\Psi(\mathrm{v}). \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим uv=z. Тогда $z_{r_i q_i} = \sum_{p_i=1}^{n} u_{r_i p_i} \cdot v_{p_i q_i}$ (r_i, q_i =1, ..., n). Дифференцируя (4) k раз по $v_{p_i q_i}$ (i=1,...,k), соответственно, и подставляя v=e получаем:

$$\begin{cases} \sum\limits_{r_1 \dots r_k} \dfrac{\partial^k \Phi(u)}{\partial u_{r_1 q_1} \dots \partial u_{r_k q_k}} u_{r_1 p_1} \dots u_{r_k p_k} = \Phi(u) \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(v)}{\partial v_{p_1 q_1} \dots \partial v_{p_k q_k}} \right\}_{v=e}, \\ \sum\limits_{r_1 \dots r_k} \dfrac{\partial^k \Psi(u)}{\partial u_{r_1 q_1} \dots \partial u_{r_k q_k}} u_{r_1 p_1} \dots u_{r_k p_k} = \Psi(u) \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(v)}{\partial v_{p_1 q_1} \dots \partial v_{p_k q_k}} \right\}_{v=e} + \Phi(u) \left\{ \dfrac{\partial^k \Psi(v)}{\partial v_{p_1 q_1} \dots \partial v_{p_k q_k}} \right\}_{v=e}. \end{cases} \tag{5}$$

p_1, q_1, … , p_k, q_k=1, 2, … , n.

Принимая во внимание обозначения

$$\left\{ \frac{\partial^k \Phi(v)}{\partial v_{p_1 q_1} \dots \partial v_{p_k q_k}} \right\}_{v=e} = A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}; \quad \left\{ \frac{\partial^k \Psi(v)}{\partial v_{p_1 q_1} \dots \partial v_{p_k q_k}} \right\}_{v=e} = B^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}$$

систему (5) можно переписать как

$$\begin{cases} \sum\limits_{r_1 \dots r_k} \dfrac{\partial^k \Phi(u)}{\partial u_{r_1 q_1} \dots \partial u_{r_k q_k}} u_{r_1 p_1} \dots u_{r_k p_k} = \Phi(u) \cdot A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}, \\ \sum\limits_{r_1 \dots r_k} \dfrac{\partial^k \Psi(u)}{\partial u_{r_1 q_1} \dots \partial u_{r_k q_k}} u_{r_1 p_1} \dots u_{r_k p_k} = \Psi(u) \cdot A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k} + \Phi(u) \cdot B^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}. \end{cases} \tag{6}$$

p_1, q_1, … , p_k, q_k=1, 2, … , n.

Умножив систему (6) на $\dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_1 p_1}}, \dots, \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_k p_k}}$ и просуммируя по p с 1 по n получаем:

$$\begin{cases} \sum\limits_{r_1 \dots r_k} \dfrac{\partial^k \Phi(u)}{\partial u_{r_1 q_1} \dots \partial u_{r_k q_k}} \sum\limits_{p_1=1}^{n} u_{r_1 p_1} \cdot \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_1 p_1}} \dots \sum\limits_{p_k=1}^{n} u_{r_k p_k} \cdot \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_k p_k}} = \\ = \sum\limits_{p_1=1}^{n} \dots \sum\limits_{p_k=1}^{n} \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_1 p_1}} \dots \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_k p_k}} \Phi(u) A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}, \\ \sum\limits_{r_1 \dots r_k} \dfrac{\partial^k \Psi(u)}{\partial u_{r_1 q_1} \dots \partial u_{r_k q_k}} \sum\limits_{p_1=1}^{n} u_{r_1 p_1} \cdot \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_1 p_1}} \dots \sum\limits_{p_k=1}^{n} u_{r_k p_k} \cdot \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_k p_k}} = \\ = \sum\limits_{p_1=1}^{n} \dots \sum\limits_{p_k=1}^{n} \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_1 p_1}} \dots \dfrac{\partial |u|}{\partial u_{s_k p_k}} \left[\Psi(u) A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k} + \Phi(u) B^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k} \right]. \end{cases} \tag{7}$$

s_1, q_1, … , s_k, q_k=1, 2, … , n.

Учитывая

$$\begin{cases} \sum\limits_{p_1=1}^{n} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \cdot \mathrm{u}_{r_1 p_1} = e_{r_1 s_1} \cdot |\mathrm{u}|, \ \dots , \ \sum\limits_{p_k=1}^{n} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \cdot \mathrm{u}_{r_k p_k} = e_{r_k s_k} \cdot |\mathrm{u}|, \\ \sum\limits_{s_1=1}^{n} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \cdot \mathrm{u}_{s_1 t_1} = e_{p_1 t_1} \cdot |\mathrm{u}|, \ \dots , \ \sum\limits_{s_k=1}^{n} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \cdot \mathrm{u}_{s_k t_k} = e_{p_k t_k} \cdot |\mathrm{u}|, \end{cases}$$

где $e_{r_i s_i} = \begin{cases} 1, \ r_i = s_i \\ 0, \ r_i \neq s_i \end{cases}$ - символы Кронеккера, в (7) и заменяя r_j на s_j (j=1, 2, ..., n) получаем

$$\begin{cases} |\mathrm{u}|^k \frac{\partial^k \Phi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1 q_1} \dots \partial \mathrm{u}_{s_k q_k}} = \sum\limits_{p_1 \dots p_k} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \dots \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \Phi(\mathrm{u}) A^{p_1 q_1 \dots p_k q_k}, \\ |\mathrm{u}|^k \frac{\partial^k \Psi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1 q_1} \dots \partial \mathrm{u}_{s_k q_k}} = \sum\limits_{p_1 \dots p_k} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \dots \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \left[\Psi(\mathrm{u}) A^{p_1 q_1 \dots p_k q_k} + \Phi(\mathrm{u}) B^{p_1 q_1 \dots p_k q_k} \right]. \end{cases}$$

$s_1, q_1, \dots , s_k, q_k$=1, 2, … , n.

Теорема доказана.

Теперь перейдем к доказательству обратной теоремы, которая гласит так:

Если переопределенная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} |\mathrm{u}| \frac{\partial \Phi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{sq}} = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{sp}} \Phi(\mathrm{u}) A^{pq}, \\ |\mathrm{u}| \frac{\partial \Psi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{sq}} = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{\partial|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{sp}} \left[\Psi(\mathrm{u}) A^{pq} + \Phi(\mathrm{u}) B^{pq} \right]. \end{cases} \quad q, s = 1, \dots, n, \tag{8}$$

которая получается из уравнения (3) при k=1, имеет аналитическое решение в окрестности единичного элемента $e \in End\ \mathbb{C}^n$, удовлетворяющее начальным условиям (2), то оно является и решением системы функциональных уравнений (1).

Для доказательства этого факта нам понадобится следующая вспомогательная лемма:

Лемма 2.1. Если пара (Φ(u), Ψ(u)) функций является аналитическим решением переопределенной системы дифференциальных уравнений (3), то она является и решением следующей системы дифференциальных уравнений k-ого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial^k \Phi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1 q_1} \cdots \ \partial \mathrm{u}_{s_k q_k}} = \sum\limits_{p_1 \cdots p_k} \frac{\partial \ln|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial \ln|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \Phi(\mathrm{u}) A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}, \\ \frac{\partial^k \Psi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1 q_1} \cdots \ \partial \mathrm{u}_{s_k q_k}} = \sum\limits_{p_1 \cdots p_k} \frac{\partial \ln|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial \ln|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \Psi(\mathrm{u}) A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k} + \\ \qquad + \sum\limits_{p_1 \cdots p_k} \frac{\partial \ln|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial \ln|\mathrm{u}|}{\partial \mathrm{u}_{s_k p_k}} \Phi(\mathrm{u}) B^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k}, \end{cases} \tag{9}$$

$s_1, q_1, \ldots, s_k, q_k = 1, 2, \ldots, n.$

Здесь $\sum\limits_{p_1 \cdots p_k} = \sum\limits_{p_1=1}^{n} \cdots \sum\limits_{p_k=1}^{n}$. При k=1 матрицы $A^{p_1q_1 \cdots p_kq_k}$ и $B^{p_1q_1 \cdots p_kq_k}$ превращаются в коэффициенты A^{pq} и B^{pq} переопределенной системы дифференциальных уравнений (8). При k>1 они определяются следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{cases} A^{p_1q_1 \cdots p_kq_kpq} = A^{pq}A^{p_1q_1 \cdots p_kq_k} - e_{p_1q}A^{pq_1p_2q_2 \cdots p_kq_k} - \cdots - e_{p_kq}A^{p_1q_1 \cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k} \\ B^{p_1q_1 \cdots p_kq_kpq} = B^{pq}A^{p_1q_1 \cdots p_kq_k} - e_{p_1q}B^{pq_1p_2q_2 \cdots p_kq_k} - \cdots - e_{p_kq}B^{p_1q_1 \cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k} \end{cases}, \quad (10)$$

где e_{p_iq} (i=1, 2, … , n) - символы Кронеккера.

Доказательство. Докажем (9) методом математической индукции. При k=1 (9) превращается в систему дифференциальных уравнений (8). Предположим, что система уравнений (9) справедлива для k>1. Докажем, что она справедлива и для k+1. Для этого умножим обе части системы (9) на $|\mathrm{u}|^{-k}=(\det(\mathrm{u}))^{-k}$ и получим производную по u_{sq} от обеих частей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{k+1}\Phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}_{s_1q_1}\ldots\partial \mathbf{u}_{s_kq_k}\partial \mathbf{u}_{sq}} = \sum\limits_{p_1\cdots p_k}\left(-k|\mathbf{u}|^{-(k+1)}\dfrac{\partial|\mathbf{u}|}{\partial \mathbf{u}_{sq}}\cdot\dfrac{\partial|\mathbf{u}|}{\partial \mathbf{u}_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|\mathbf{u}|}{\partial \mathbf{u}_{s_kp_k}}\Phi(\mathbf{u})A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \right. \\ +|\mathbf{u}|^{-k}\dfrac{\partial^2|\mathbf{u}|}{\partial \mathbf{u}_{s_1p_1}\partial u_{sq}}\cdot\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \ldots + \\ +|u|^{-k}\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot\dfrac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_kp_k}\partial u_{sq}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \\ \left. +|u|^{-k}\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\dfrac{\partial\Phi(u)}{\partial u_{sq}}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right), \\ \\ \dfrac{\partial^{k+1}\Psi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}} = \sum\limits_{p_1\cdots p_k}\left(-k|u|^{-(k+1)}\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\left[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \right.\right. \\ \left. +\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] + |u|^{-k}\dfrac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_1p_1}\partial u_{sq}}\cdot\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\left[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \right. \\ \left. +\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] + \ldots + |u|^{-k}\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot\dfrac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_kp_k}\partial u_{sq}}\left[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \right. \\ \left.\left. +\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] + |u|^{-k}\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\left[\dfrac{\partial\Psi(u)}{\partial u_{sq}}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \dfrac{\partial\Phi(u)}{\partial u_{sq}}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right]\right). \end{cases} \quad (11)$$

Умножим обе части системы (11) на $|u|^{k+1}$:

$$|u|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Phi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}}=\sum_{p_1\cdots p_k}-k\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\sum_{p_1\cdots p_k}|u|\frac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_1p_1}\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\ldots+$$

$$+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot|u|\cdot\frac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_kp_k}\partial u_{sq}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot|u|\cdot\frac{\partial\Phi(u)}{\partial u_{sq}}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k},\tag{12}$$

$$|u|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Psi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}}=\sum_{p_1\cdots p_k}-k\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]+\sum_{p_1\cdots p_k}|u|\frac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_1p_1}\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]+\ldots+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot|u|\cdot\frac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_kp_k}\partial u_{sq}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot|u|\cdot\left[\frac{\partial\Psi(u)}{\partial u_{sq}}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\frac{\partial\Phi(u)}{\partial u_{sq}}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right].\tag{13}$$

Теперь производим следующие замены в (12) и (13):

$$|u|\frac{\partial^2|u|}{\partial u_{s_tp_t}\partial u_{sq}}=\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_tp_t}}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}-\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_tq}}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp_t}}\qquad (t=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

$$\begin{cases}|u|\dfrac{\partial\Phi(u)}{\partial u_{sq}}=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\Phi(u)A^{pq}\\[2ex]|u|\dfrac{\partial\Psi(u)}{\partial u_{sq}}=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\Big[\Psi(u)A^{pq}+\Phi(u)B^{pq}\Big]\end{cases}\qquad (s,\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$|u|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Phi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}}=\sum_{p_1\cdots p_k}-k\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\ldots+$$

$$+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}-$$

$$-\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1q}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp_1}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}-\ldots-$$

$$-\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp_k}}\Phi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\Phi(u)A^{pq}\right]A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} \tag{12a}$$

$$|u|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Psi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}}=\sum_{p_1\cdots p_k}-k\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]+\ldots+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sq}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]-\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1q}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp_1}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]-\ldots-\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_{k-1}p_{k-1}}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kq}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp_k}}\Big[\Psi(u)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+$$

$$+\Phi(u)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big]+\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\left(\Psi(u)A^{pq}+\Phi(u)B^{pq}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\cdot\Phi(u)A^{pq}\right)\cdot B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] \tag{13a}$$

Учитывая $\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_tq}}=\sum\limits_{p=1}^{n}e_{pq}\dfrac{\partial|u|}{\partial u_{s_tp}}$ (t=1, 2, …, k), получаем:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&|u|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Phi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}} = \sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\cdot\Phi(u)A^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} -\\
&-\sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\cdot\Phi(u)e_{p_1q}A^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k}-\ldots-\\
&-\sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\cdot\Phi(u)e_{p_kq}A^{p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k},\\
&|u|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Psi(u)}{\partial u_{s_1q_1}\ldots\partial u_{s_kq_k}\partial u_{sq}} = \sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\cdot\Big[\Psi(u)A^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\\
&+\Phi(u)\Big(B^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+A^{pq}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\Big)\Big]-\sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\times\\
&\times\Big[\Psi(u)e_{p_1q}A^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k}-\Phi(u)e_{p_1q}B^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k}\Big]-\ldots-\\
&-\sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|u|}{\partial u_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial u_{sp}}\times\\
&\times\Big[\Psi(u)e_{p_kq}A^{p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k}+\Phi(u)e_{p_kq}B^{p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k}\Big].
\end{aligned}
\right. \tag{14}
$$

Введем следующие обозначения:

$$
\left\{\frac{\partial^{k+1}\Phi(u)}{\partial u_{p_1q_1}\ldots\partial u_{p_kq_k}\partial u_{pq}}\right\}_{u=e} = C^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq};\quad \left\{\frac{\partial^{k+1}\Psi(u)}{\partial u_{p_1q_1}\ldots\partial u_{p_kq_k}\partial u_{pq}}\right\}_{u=e} = D^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq}.
$$

Тогда переопределенную систему дифференциальных уравнений (14) при u= $e \in End\, \mathrm{C}^n$ можно переписать так:

$$
\begin{cases}
C^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq} = A^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} - e_{p_1q}A^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k} - \ldots - e_{p_kq}A^{p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k};\\
D^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq} = B^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} - e_{p_1q}B^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k} - \ldots - e_{p_kq}B^{p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k}.
\end{cases}
$$

$(p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k, p, q=1, 2, \ldots, n)$.

Рекуррентные операторные соотношения (10) доказаны. Лемма доказана.

Теорема 2.2. Если переопределенная система дифференциальных уравнений (8) имеет аналитическое решение в окрестности единичного элемента $e \in End\, \mathrm{C}^n$, удовлетворяющее начальным условиям (2), то оно является и решением системы функциональных уравнений (1).

Доказательство. Для доказательства будем воспользоваться системой (6). Решение системы (8), в силу условия (2), совпадает с решением системы (1) в точке $e \in End\, \mathrm{C}^n$. Если мы сможем из системы дифференциальных уравнений (8) с учётом начальных условий (2), получить следующие равенства для любого k, то доказательство теоремы будет очевидно.

$$\begin{cases} \left\{ \dfrac{\partial^k \left(\Phi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}) - \Phi(\mathrm{uv})\right)}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} = 0, \\ \left\{ \dfrac{\partial^k \left(\Psi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}) + \Phi(\mathrm{u})\Psi(\mathrm{v}) - \Psi(\mathrm{uv})\right)}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим uv=z. Тогда систему (15) можем переписать так:

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{u}) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} = \sum\limits_{s_1 \ldots s_k} \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{z})}{\partial \mathrm{z}_{s_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{z}_{s_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} \mathrm{u}_{s_1 r_1} \ldots \mathrm{u}_{s_k r_k}, \\ \Psi(\mathrm{u}) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} + \Phi(\mathrm{u}) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^k \Psi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} = \\ = \sum\limits_{s_1 \ldots s_k} \left\{ \dfrac{\partial^k \Psi(\mathrm{z})}{\partial \mathrm{z}_{s_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{z}_{s_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} \mathrm{u}_{s_1 r_1} \ldots \mathrm{u}_{s_k r_k}. \end{cases}$$

или же,

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{u}) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} = \sum\limits_{s_1 \ldots s_k} \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{u}_{s_k q_k}} \mathrm{u}_{s_1 r_1} \ldots \mathrm{u}_{s_k r_k}, \\ \Psi(\mathrm{u}) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} + \Phi(\mathrm{u}) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^k \Psi(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{v}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{v}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{v}=e} = \\ = \sum\limits_{s_1 \ldots s_k} \dfrac{\partial^k \Psi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{s_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{u}_{s_k q_k}} \mathrm{u}_{s_1 r_1} \ldots \mathrm{u}_{s_k r_k}. \end{cases} \tag{16}$$

Если в системе (6) положим u= $e \in End\, \mathbb{C}^n$, то учитывая (2) можно написать:

$$\begin{cases} \left\{ \dfrac{\partial^k \Phi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{u}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{u}=e} = A^{r_1 q_1 \ldots r_k q_k}, \\ \left\{ \dfrac{\partial^k \Psi(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}_{r_1 q_1} \ldots \partial \mathrm{u}_{r_k q_k}} \right\}_{\mathrm{u}=e} = B^{r_1 q_1 \ldots r_k q_k}. \end{cases} \tag{17}$$

Учитывая (17) в (6) можно получить: $\begin{cases} \Phi(\mathrm{uv}) = \Phi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}), \\ \Psi(\mathrm{uv}) = \Psi(\mathrm{u})\Phi(\mathrm{v}) + \Phi(\mathrm{u})\Psi(\mathrm{v}). \end{cases}$

Таким образом, мы доказали, что если переопределенная система дифференциальных уравнений (8) имеет аналитическое решение в окрестности единичного элемента $e \in End\, \mathbb{C}^n$, удовлетворяющее начальным условиям (2), то оно является и решением системы функциональных уравнений (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. Минск, "Наука и Техника", 1989.
2. Kucharzewski M., Kuczma M. On a system of functional equations occurring in the theory of geometric objects. Ann. Polon. Math., 1963.
3. Kucharzewski M., Kuczma M. Determination of linear differential geometric objects of the first class, with two components in a two-dimensional space. Ann. Polon. Math., 1964.
4. Zeren Y., Ragimov M.B. New solution of overdetermined system of characteristic differential equations of Lie group. Azərbaycan respublikası, "Təhsil" cəmiyyəti, "Bilgi" dərgisi, fizika, riyaziyyat, yer elmləri. 2004, №3, s. 25-28.
5. Рагимов М.Б., Исмаилова Т.А. Аналитические решения переопределенных систем характеристических дифференциальных уравнений Ли и условия полной разрешимости. Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 1998, №1, s. 155-164.

BİR FUNKSİONAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİ HAQQINDA

M.B.RƏHİMOV, T.D.MUSTAFAYEV

XÜLASƏ

Məqalədə həndəsi cisimlər nəzəriyyəsində mühüm tətbiqləri olan funksional tənliklər sisteminə baxılır. Sistemin gətirilə bilməyən həllərini tapmaq üçün bu sistem xüsusi törəməli artıqlaşmış diferensial tənliklər sisteminə gətirilir. Sistemin həllinin varlığı üçün kafi şərtləri təsbit edən teorem isbat olunur.

ON A SOLUTION OF ONE SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS

M.B.RAHİMOV, T.D.MUSTAFAYEV

SUMMARY

In this article a system of functional equations with important application in the theory of Geometric Objects is considered. In order to find the non-reducible solutions of this system the system of functional equations is reduced to the overdetermined system of differential equations with partial derivatives. The theorem establishing sufficient conditions for the existence of non-reducible solutions of this system is proved.